

Algunos Aspectos Sobre Alturas Ortométricas y Normales

Petr Vaníček¹
Marcelo Santos²
Robert Tenzer³
Antonio Hernández-Navarro⁴

Resumen

Por mucho tiempo los geodestas han discutido sobre que sistema de alturas es mas apropiado para la realización práctica de un datum vertical. Estas discusiones están resurgiendo en varias partes del mundo, así como países individuales y grupos de ellos están encaminando sus esfuerzos para la modernización de sus redes verticales. Este auge se ha dado por el advenimiento de la disponibilidad del GPS para medir de forma exacta diferencias de alturas geodésicas.

Existen dos conceptos básicos de alturas que han sido considerados seriamente en la próxima modernización de las redes de alturas nacionales. Estos son el sistema de alturas ortométricas o el concepto de Molodensky de alturas normales. En este artículo se intenta presentar alguna luz sobre estos conceptos y responder algunas de las principales cuestiones que surgen sobre la comparación de estos dos conceptos. Ambos sistemas de alturas son igualmente exactos. En las conclusiones se presentan recomendaciones encaminadas a la adopción del sistema basado en alturas ortométricas.

Abstract

For a long time, geodesists have been discussing which of the height systems is more appropriate for a practical realization of the vertical datum. These discussions are now heating up again in different parts of the world, as individual countries and group of countries are embarking on another wave of modernization of their height networks. This new wave has been sparked by the advent of GPS ability to measure relatively accurate geodetic height differences.

There are two basic concepts of heights that are being seriously considered for adoption in the next of modernization of national height networks. These are the system of orthometric heights or Molodensky's concept of normal heights. In this paper we attempt to throw some light on these two concepts and to answer some of the principal questions arising from the comparison of these two concepts. Both height systems are equally accurate. In our conclusions we present a recommendation that the system of orthometric heights be the one adopted.

Introducción

La búsqueda para la adecuada representación de las alturas no es algo trivial y la definición apropiada de un sistema de referencia vertical es esencial para muchas aplicaciones. Con relación a la naturaleza, algunos seres humanos de manera normal relacionan lo más posible algunos

¹ Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, P. O. Box 4400, Fredericton, NB, Canada E3B 5A3 email Vanicek@unb.ca

² email msantos@unb.ca

³ email tenzer@unb.ca

⁴ Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. Dirección General Adjunta de Geografía. Coordinación de Geodesia. Av. Héroe de Nacozari # 2301 Sur, Frac. Jardines del Parque, Aguascalientes, Ags., 20170 MÉXICO. email: Antonio.Hernandez@inegi.gob.mx

conceptos abstractos a la realidad física que los rodea. En términos de la altura, la forma más natural para definir las es tomar una superficie horizontal como referencia para su registro. La superficie de referencia que surge de manera natural es la del agua, debido a su propiedad de mantenerse a sí misma horizontal (por definición) dondequiera que sea su posición en el espacio. En otras palabras, la gravedad siempre es perpendicular a la superficie del agua – desde luego, esto es estrictamente verdadero sólo para cuerpos de agua homogéneos y no perturbados. La superficie del agua más importante es el nivel del mar. Por lo tanto, no hay nada más natural y simple que seleccionar al nivel del mar como la superficie para su registro. Sin embargo el nivel del mar está en constante movimiento, debido a las mareas, las olas, las corrientes, así como muchas otras causas adicionales, por ello se debe tomar una posición promedio sobre cierto periodo de tiempo para hacer usarla: por lo que se habla del nivel medio del mar. En un intento para fijar el nivel del mar en el tiempo, *Listing* [1873], estudiante de Gauss, introdujo el geoide, como la superficie que mejor representa el nivel medio del mar, en un estado no perturbado. El geoide es la superficie equipotencial básica del campo de gravedad de la Tierra.

Altura Ortométrica

Contando con una superficie de referencia, se pueden definir varios tipos de alturas. La más natural y por ello la más popular es la altura ortométrica. Este tipo de altura es especial por su significado puramente geométrico. La altura ortométrica se define como la distancia vertical entre la superficie física de la Tierra y la superficie del geoide. Esta distancia se mide a lo largo de la línea de plomada, la cual es la curva que es tangencial a la dirección de la gravedad en cualquier punto. La línea de plomada no es una línea recta, ya que tiene una leve curvatura y giro, ya que la dirección de la gravedad varía dependiendo de las características de densidad local.

Para evaluar la altura ortométrica con exactitud es necesario conocer el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de plomada. En virtud de que la gravedad a lo largo de la línea de plomada no puede ser medida, el valor medio de la gravedad tiene que ser estimado de la gravedad observada en la superficie de la Tierra aceptándose alguna hipótesis sobre la distribución topográfica de la masa y densidad.

Varios autores han presentado diferentes clases de alturas ortométricas, dependiendo de cómo se obtiene la gravedad media a lo largo de la línea de plomada. *Helmert* [1890] es el nombre más frecuentemente asociado con las alturas ortométricas. Otros autores son *Niethammer* [1932], *Mader* [1954] y, más recientemente, *Allister y Featherstone* [2001], *Hwang y Hsiao* [2003] y *Tenzer et al* [2003a]. Estas diferentes clases de alturas ortométricas sirven como una ilustración de cuán difícil es una evaluación rigurosa de las alturas ortométricas.

En la definición de *Helmert* [1890] de altura ortométrica, el valor medio de gravedad se evalúa de tal forma que el valor de la gravedad observada sobre la superficie de la Tierra se reduce (aproximadamente) al punto medio de la línea de plomada usando el gradiente de gravedad de *Poincaré-Pray*. *Niethammer* [1932] y posteriormente *Mader* [1954] toman en cuenta el valor medio de la corrección gravimétrica de terreno a lo largo de la línea de plomada. Vaníček et al [1995] introdujeron la corrección a la altura ortométrica de Helmert debida a la variación lateral de la densidad topográfica, y resultados numéricos similares fueron mostrados también por *Allister y Featherstone* [2001], y *Tenzer y Vaníček* [2004]. *Véronneau* [2002] introdujo la idea de la corrección de la altura ortométrica de Helmert debida a la variación con la altura del gradiente de gravedad normal. *Molodensky* [1948] mostró que la gravedad media a lo largo de la línea de plomada depende también del cambio vertical de la gravedad perturbada con la profundidad, y *Hwang y Hsiao* [2003] investigaron este efecto.

En *Tenzer et al* [2003a], la continuación descendente analítica de la gravedad observada sobre la superficie de la Tierra se usa para evaluar el valor de la gravedad media a lo largo de la línea de plomada. la relación entre el gradiente de gravedad de *Poincaré-Pray* y la continuación descendente analítica de la gravedad, su formulación, así como la corrección de la altura ortométrica de Helmert que surge de esta relación. Aplicando esta solución en el área de prueba de las montañas Rocallosas canadienses, el resultado numérico ha mostrado que las alturas ortométricas de Helmert pueden ser mejoradas significativamente- ver Tabla 1. Las correcciones debidas a los efectos de geoide-perturbación de gravedad generada, corrección esférica del

terreno y variación lateral de la densidad topográfica claramente implican un cambio en la altura ortométrica de Helmert montañas arriba de varios centímetros. La figura 1 muestra el efecto total en el área de prueba.

Corrección debido a	Mínimo [cm]	Máximo [cm]	Promedio [cm]
Media geoide-perturbación de gravedad generada	-3.4	7.9	0.1
Media corrección esférica del terreno	-21.7	3.0	0.8
Variación lateral de la densidad topográfica	-6.5	2.2	-0.3
Efecto total sobre la altura ortométrica	-25.3	5.8	-1.6

Tabla 1. Efectos sobre la altura ortométrica de Helmert

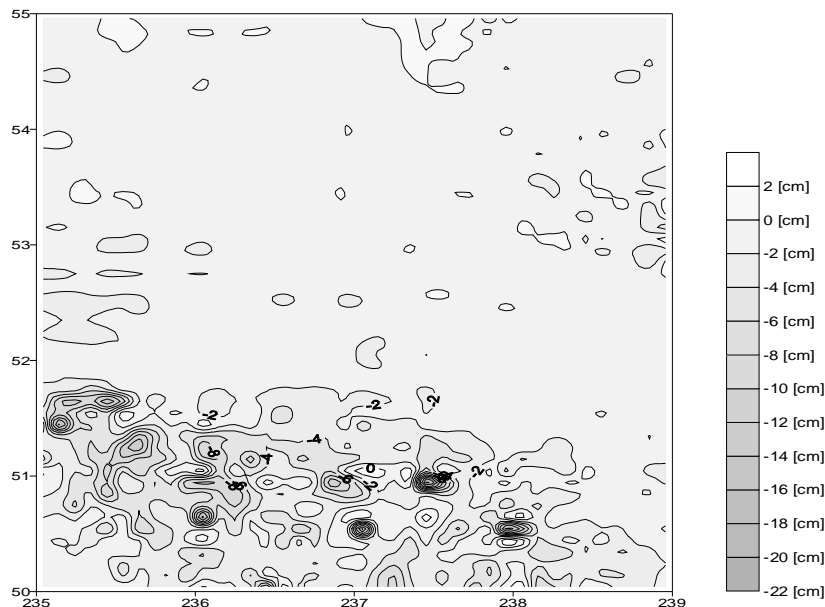


Figura 1. Efecto total sobre Alturas ortométricas de Helmert [cm]

Las alturas ortométricas se relacionan con las alturas geodésicas sobre el elipsoide geocéntrico de referencia (las alturas geodésicas son más popularmente llamadas alturas elipsoidales – para una discusión profunda de lo inapropiado de este término ver [Vaníček, 1998]) por medio de la altura geoidal N . La altura geodésica actualmente puede ser determinada directamente por sistemas geodésicos espaciales tal como el GPS. La relación entre la altura ortométrica y la altura geodésica se expresa por la ecuación:

$$N = h - H^o \tag{1}$$

Esta expresión, simple como se ve, es muy importante. Indica que no importa cuan exacto pueda ser el valor de h dado por GPS, es N la que dicta la exactitud final de H^o . Las alturas geodésicas no pueden ser consideradas prácticas, ver [idib, 1998]. Los valores de N están dados por las diferentes exactitudes de los diferentes modelos geoidales.

Argumentos Históricos en Contra de las Alturas Ortométricas

Los argumentos a favor de las alturas ortométricas fueron presentados en la sección previa. Sin embargo, algunos argumentos en contra de las alturas ortométricas que han sido introducidos por varios oponentes de ellas deben ser considerados, los cuales se resumen a continuación.

El principal argumento en contra de las alturas ortométricas fueron formulados por *Molodensky* [1945; 1984]. Molodensky averiguó que la densidad topográfica entre la superficie y el geoide (conocida como topo-densidad) no podían determinarse precisamente. Quizá sin sorpresa, la gente que opte contra el uso de alturas ortométricas diga que la topo-densidad nunca podrá ser conocida con "suficiente exactitud". Basado en esta conjetura, Molodensky formuló la teoría de alturas normales. En su teoría, la gravedad actual media es reemplazada por la gravedad normal media entre el elipsoide de referencia y el teluroide (una nueva superficie introducida junto con la teoría de alturas normales, ver la siguiente sección).

La conversión de alturas ortométricas en alturas geodésicas, o viceversa, como se indica en la ecuación (1), requiere que la altura geoidal sea conocida con "suficiente exactitud". Esto significa, que el modelo geoidal deberá tener una exactitud de unos pocos centímetros haciendo que la determinación de alturas ortométricas derivadas de GPS sea comparable con una exactitud factible. Solamente unas pocas regiones del mundo tienen modelos geoidales regionales con una exactitud comparable con la alta exactitud del posicionamiento GPS. Esto soporta los argumentos de aquellos en contra de las alturas ortométricas que afirman que no es posible, y que nunca será posible, contar con un geoide lo suficientemente exactos.

También, están aquellos que afirman que las alturas ortométricas no representan un sistema de alturas holonómico, significando que el valor de una altura ortométrica no es único. Para alturas anholonómicas, el valor depende de la ruta seguida en la derivación de las alturas, esto es, las alturas son dependientes de la trayectoria. Anholonómica también puede significar que las alturas ortométricas no se pueden usar en el ajuste de redes de nivelación debido a que las diferencias de altura anholonómicas no suman cero al cerrar un circuito.

Alturas Normales

En un intento para desviar algunas de los posibles defectos de las alturas ortométricas (como se indicó en la sección previa), *Molodensky* [1945; 1948] sugirió el uso de alturas normales. Las alturas normales son una aproximación a las alturas ortométricas, describiendo las alturas sobre una superficie ficticia, el quasigeoide. La altura normal H^N requiere el uso de una cantidad conocida como anomalía de altura ζ [*Molodensky et al.*, 1960]. La anomalía de altura se define como la distancia a lo largo de la normal elipsoidal entre el quasigeoide y el elipsoide de referencia, o alternativamente, como la distancia entre la superficie de la Tierra y el teluroide. Estas anomalías de alturas son llamadas algunas veces "alturas quasigeoidales".

La introducción de la altura normal elimina la necesidad de conocer la topo-densidad, ya que en su definición clama por el conocimiento del valor medio de la gravedad normal a lo largo de la normal elipsoidal entre el elipsoide geocéntrico de referencia y el teluroide. Este hecho permite que la altura normal sea calculada exactamente (como exactamente pueda ser determinado el número geopotencial basado en gravedad actual) debido a que no requiere ningún conocimiento sobre la distribución de la densidad topográfica.

Para la conversión de alturas normales a alturas geodésicas es necesario conocer la anomalía de altura con "suficiente exactitud". Esto puede lograrse, de acuerdo con los conceptos propuestos por Molodensky, debido a que la determinación de la anomalía de altura no requiere el conocimiento de la topo-densidad.

De acuerdo a *Heiskanen y Moritz* (1967), la relación entre las alturas ortométricas y normales está aproximadamente definida como una función lineal de la anomalía de gravedad simple de Bouguer. En el artículo [*Tenzer et al.*, 2003b] se introduce una relación más rigurosa entre las alturas normales y ortométricas. Basándose en esta definición, la gravedad media a lo largo de la línea de plomada consiste en dos partes. La primera parte representa la definición matemática de la gravedad normal media entre la superficie de la Tierra y la superficie del geoide. Incluye la gravedad normal media de Molodensky entre el teluroide y la superficie del elipsoide más la

reducción de la gravedad normal media debida a la deflexión de la línea de plomada, anomalía de altura y corrección geoide-quasigeoide. La segunda parte de la definición trata con la perturbación de gravedad media generada por el geoide y el valor medio de la atracción gravitacional de las masas topográficas y atmosféricas. El efecto de la topografía y el producido por la perturbación de gravedad producida por el geoide causa un cambio de varios decímetros en la altura ortométrica. La influencia total de estos dos efectos sobre la altura ortométrica se muestra en la figura 2. En el área de prueba de las montañas Rocallosas canadienses varía de -45.6 a 0.0 cm. La ausencia de valores positivos en esta región montañosa se debe al hecho de que la parte dominante de la influencia es causado por el efecto del término esférico de Bouguer. El efecto de la atmósfera es despreciable.

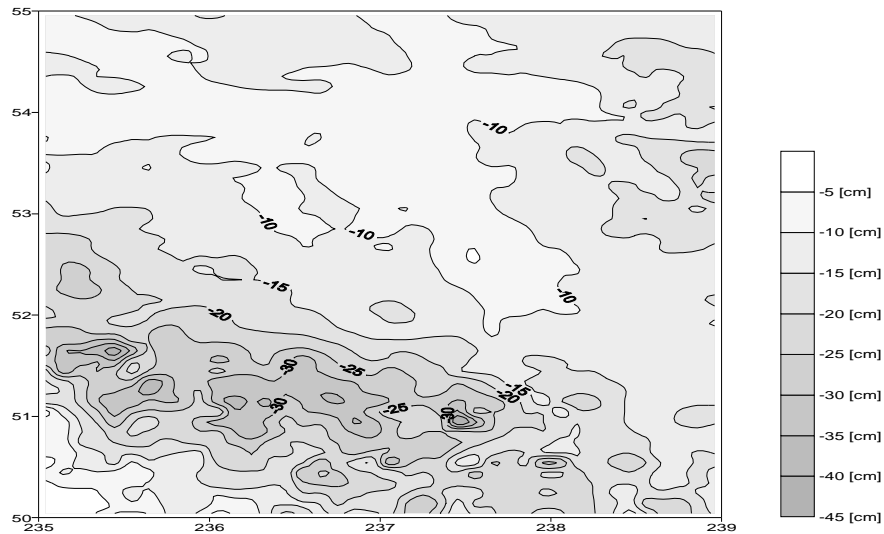


Figura 2. Diferencia entre Alturas ortométricas y normales [cm]

Argumentos Históricos en Contra de las Alturas Normales

La teoría de las alturas normales, al igual que la teoría detrás de las alturas ortométricas, ha tenido un profundo impacto en la Geodesia. Pero esta teoría ha sido vista como falta de prueba como sus abogados quisieran que tuvieran. Dos de los argumentos más importantes en contra de las alturas normales se resumen a continuación.

El quasigeoide no es una superficie con significado físico, excepto cuando coincide con el geoide; esto es, en el mar, y aun cuando esta coincidencia es sólo aproximada y comienza muy alejado de la costa. La adopción de un sistema de alturas normales puede impedir a la Geodesia de proveer un magnífico servicio a otras Ciencias de la Tierra que requieren el significado físico del geoide para muchas diferentes aplicaciones.

Otro argumento en contra frecuentemente citado contra las alturas normales es que estas alturas no son holonómicas, significando que las alturas no son únicas y que las alturas normales no pueden ser usadas en el ajuste de redes verticales.

Algunas Realidades Detrás de las Alturas Ortométricas y Normales

Ambas alturas, ortométricas y normales, tienen sus características especiales, buenas o malas, dependiendo del ojo del observador. La realidad detrás de ellas puede resumirse en los siguientes párrafos.

La evaluación del valor medio de gravedad para la constante de topo-densidad usada, será el mayor obstáculo en el cálculo de alturas ortométricas. Actualmente, sin embargo se puede determinar con la suficiente exactitud para dar valores razonables de alturas ortométricas.

Una contribución substancial al valor medio de gravedad necesario para la evaluación de alturas ortométricas viene, desde luego, de la variación de la densidad topográfica. Se ha mostrado [Martinec, 1993; 1998; Martinec et al., 1995; 1996; y Huang et al. 2001] que aún cuando la variación superficial lateral de la densidad topográfica, pueda ser estimada de mapas geológicos, dan una aproximación razonable de la distribución de densidad topográfica actual. Las variaciones laterales de latoso-densidad pueden ser determinadas en nuestros días con bastante exactitud para darnos errores en alturas ortométricas por debajo de 1 cm sobre la mayoría del terreno con cobertura decente de gravedad. Esto fue mostrado usando los errores estimados de valores variados lateralmente de topo-densidad, como los presentados por Huang et al. [2001].

Existe cierta controversia sobre si las alturas ortométricas y normales son holonómicas o no. Como un hecho cierto, Heiskanen y Moritz [1967] han puntualizado el hecho de que ambas son holonómicas, el hecho fue posteriormente reforzado por Vaníček [1986]. Con ello la controversia ha sido solventada. Esta característica común a ambas iguala convenientemente su uso en ajuste de redes así como en la defensa práctica de alturas.

Por otra parte, ni las alturas ortométricas ni las normales tienen "significado físico" en cuanto a la descripción correcta del comportamiento físico de fluidos. La única excepción es correcta en el nivel del mar, donde ambas alturas son iguales a cero. En otra parte, una diferencia de altura ortométrica o normal negativa entre los puntos A y B no garantiza que un fluido realmente fluya de A hacia B.

De acuerdo al hecho de que el quasigeoide no es una superficie con significado físico, creemos que esto es efectivamente un impedimento importante. Científicamente es más satisfactorio trabajar con una superficie con significado físico en lugar de una superficie puramente convencional. Por otra parte, el hecho de que ambas superficies más o menos coincidan en el mar, no solamente alejado de la costa, acota este problema a su aplicación sólo en tierra firme. Las diferencias entre el geoide y el quasigeoide pueden variar de unos pocos milímetros en el mar y terreno plano hasta algunos metros en regiones montañosas Pick et al. [1973].

Uno de los argumentos a favor de las alturas normales es que, ya que las diferencias entre las dos superficies (geoide y quasigeoide) es pequeña, por qué no definir una superficie de referencia que no cambiará dependiendo de qué tan bien se conozca la topo-densidad. Este argumento implica que el quasigeoide no variara con la evolución del conocimiento de la topo-densidad con respecto al tiempo. Un hecho cierto, es que la alturas, y también el geoide, cambian con el tiempo. Pronto o tarde, los países tendrán que aceptar este hecho e introducir alturas en función de tiempo (como Canadá lo está haciendo). Por lo tanto, al igual que un marco de referencia 3D, la superficie de referencia (vertical) deberá ser función del tiempo. Junto a esto, hay que preguntar cómo es que el quasigeoide permanecerá verdaderamente fijo en el tiempo. Ya que la gravedad real varía con el tiempo, el quasigeoide debe también cambiar. La verdad, es que será un cambio real y no un cambio en respuesta a nuestra evolución del conocimiento, pero ¿cuál es la diferencia?

En función de la exactitud actual de los modelos geoidales, las alturas geoidales pueden ahora ser determinadas para darnos con suficiente exactitud, junto con las alturas ortométricas, alturas geodésicas exactas a nivel de un error medio cuadrático (RMS) de 10 cm, aún en terrenos rugosos [Véronneau, 2001; Jekeli y Serpas, 2003].

Para concluir, la anomalía de altura se dobla para ser más elusiva que lo originalmente concebida. Su determinación recae en problemas geométricos (relacionado con la forma geométrica del teluroide), los cuales al menos son igual de serios que los problemas relacionados con los que hay en para la topo-densidad en la solución de Stokes.

Conclusiones

Nuestra conclusión es que la altura ortométrica, y como consecuencia, el geoide, puede obtenerse tan exactamente como la altura normal y el quasigeoide. Se ha mostrado que muchos de los argumentos históricos en contra de ambas alturas son erróneos: originados por mala conceptos erróneos, o han sido refutados por avances científicos y tecnológicos, al igual que por la gran

disponibilidad de datos de distinta variedad. Por lo tanto las tendencias para desacreditar cualquiera de ellas, la solución más tradicional de Stokes o la alternativa de Molodensky, están fuera de lugar. Y, si ambas son igualmente exactas, por qué no usar una que respete la física y satisfaga los requerimientos prácticos y científicos (por ejemplo en Geofísica o en Oceanografía).

Agradecimientos

La investigación para este artículo fue parcialmente financiada por el Dentro de Excelencia GEOIDE (Geomatics for Informed Decisions) y la Beca de Investigación NSERC del autor principal.

Referencias

- Allister, N.A. y W.E. Featherstone, (2001). Estimation of Helmert orthometric heights using digital barcode leveling, observed gravity and topographic mass-density data over part of Darling Scarp, western Australia. *Geomatics Research Australasia* 75: pp. 25-52.
- Heiskanen, W. H. y H. Moritz, (1967). Physical geodesy. W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- Helmert, F.R., (1890) Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen. Veröff. Königl. Preuss. Geod. Inst., Vol. 1.
- Huang, J., P. Vaníček, S.D. Pagiatakis, W. Brink, (2001). Effect of topographical density on the geoid in the Rocky Mountains. *Journal of Geodesy*, Vol. 74 (11/12), Springer, pp. 805-815.
- Hwang, C. y Y.S. Hsiao, (2003). Orthometric height corrections from leveling, gravity, density and elevation data: a case study in Taiwan. *Journal of Geodesy*, Vol. 77 (5-6), Springer, pp. 292-302.
- Jekeli, C. y J.G. Serpas, (2003). Review and numerical assessment of the direct topographical reduction in geoid determination. *Journal of Geodesy*, Vol. 77, Springer, pp. 226-239.
- Listing, J.B., (1873). Über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde. Nachrichten von der Köning. Göttingen VLG der Dietrichschen Buchhandlung.
- Martinec, Z., (1993). Effect of lateral density variations of topographical masses in view of improving geoid model accuracy over Canada. Final report of the contract DSS No. 23244-2-4356, Geodetic Survey of Canada, Ottawa.
- , (1998). Boundary value problems for gravimetric determination of a precise geoid. *Lecture notes in earth sciences*, Vol. 73, Springer.
- Martinec, Z., C. Matyska, E.W. Grafarend, P. Vaníček, (1993). On Helmert's 2nd condensation technique. *Manuscripta Geodaetica*, No. 18, Springer, pp. 417-421.
- Martinec, Z., P. Vaníček, A. Mainville, M. Véronneau, (1995). The effect of lake water on geoidal height. *Manuscripta Geodaetica*, No. 20, Springer, pp. 193-203.
- , (1996). Evaluation of topographical effects in precise geoid computation from densely sampled heights. *Journal of Geodesy*, Vol. 70, Springer, pp. 746-754.
- Molodensky, M.S., (1945). Fundamental problems of Geodetic Gravimetry (in Russian). TRUDY Ts NIIGAIK 42, Geodezizdat, Moscow.
- Molodensky, M.S., (1948). External gravity field and the shape of the Earth surface (in Russian).
- , V.F. Yeremeev, M.I. Yurkina, (1960). Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth. TRUDY Ts NIIGAIK, 131, Geodezizdat, Moscow. English transl.: Israel Program for Scientific Translation, pp. 248, Jerusalem 1962.
- Mader, K., (1954). Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 15.
- Niethammer, T., (1932). Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Schweizerische Geodätische Kommission.
- Pick, M., J. Pícha, V. Vyskočil, (1973). Theory of the Earth's Gravity Field. Elsevier, Amsterdam.
- Tenzer, R., P. Vaníček, M. Santos, (2003a). Corrections to Helmert's orthometric heights. *Conference proceeding, IUGG 2003 General Assembly*, June 30 - July 11, Sapporo, Japan.
- Tenzer, R., P. Vaníček., M. Santos, W.E. Featherstone, M. Kuhn, (2003b). Discussion of the orthometric height. *Journal of Geodesy*, Springer. (submitted)

- Tenzer, R., P. Vaníček P, (2004). Correction to Helmert's orthometric height due to actual lateral variation of topographical density. *Brazilian Journal of Cartography - Revista Brasileira de Cartografia*, Brasil. (submitted)
- Vaníček, P., (1986). Letter to the Editor. *The Canadian Surveyor*, Vol. 40, No. 1, p. 53.
- _____, (1998). The height of reason (a letter to the editor), *GPS World*, April 1998, p. 14.
- Vaníček, P., Krakiwsky E., (1986). *Geodesy: the concepts* (second edition). Elsevier Science B.V., Amsterdam.
- Véronneau, M., (2001). The Canadian Gravimetric Geoid Model of 2000 (CGG2000), http://www.geod.rncan.gc.ca/index_e/products_e/publications_e/papers_e/CGG2000a.pdf
- _____, (2002). New Adjustment of the Canadian Primary Levelling Network. Annual Scientific Meeting, CGU, Banff.